

第三章 空间向量与立体几何（知识清单）

01 考点归纳

考点一、空间向量与线、面位置关系

考点二、向量法求空间角

考点三、向量法求空间距离、折叠及探索性问题

02 知识速记

一、空间向量与线、面位置关系

1. 空间向量的有关概念

名称	定义
空间向量	空间中既有大小又有方向的量称为空间向量
相等向量	大小相等、方向相同的向量
相反向量	大小相等、方向相反的向量
共线向量 (或平行向量)	如果两个非零向量的方向相同或者相反，则称这两个向量共线(或平行)
共面向量	空间中的多个向量，如果表示它们的有向线段通过平移后，都能在同一平面内，则称这些向量共面

2. 空间向量的有关定理

(1)共线向量定理：如果 $a \neq 0$ 且 $b \parallel a$ ，则存在唯一的实数 λ ，使得 $b = \lambda a$.

(2)共面向量定理：如果两个向量 a, b 不共线，则向量 a, b, c 共面的充要条件是，存在唯一的实数对 (x, y) ，使 $c = xa + yb$.

(3)空间向量基本定理：如果空间中的三个向量 a, b, c 不共面，那么对空间中的任意一个向量 p ，存在唯一的有序实数组 (x, y, z) ，使得 $p = xa + yb + zc$. 其中， $\{a, b, c\}$ 称为空间向量的一组基底.

3. 空间向量的数量积

(1)两向量的数量积：两个非零向量 a, b ， $a \cdot b = |a||b|\cos \langle a, b \rangle$.

(2)空间向量的坐标表示及其应用

设 $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$.

	向量表示	坐标表示
数量积	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
共线	$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{b}(\mathbf{b}\neq\mathbf{0}, \lambda\in\mathbf{R})$	$a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3$
垂直	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}=0(\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0})$	$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
模	$ \mathbf{a} $	$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
夹角	$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle (\mathbf{a}\neq\mathbf{0}, \mathbf{b}\neq\mathbf{0})$	$\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle =\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

4. 直线的方向向量和平面的法向量

(1)直线的方向向量: 如果 l 是空间中的一条直线, \mathbf{v} 是空间中的一个非零向量, 且表示 \mathbf{v} 的有向线段所在的直线与 l 平行或重合, 则称 \mathbf{v} 为直线 l 的一个方向向量.

(2)平面的法向量: 如果 α 是空间中的一个平面, \mathbf{n} 是空间中的一个非零向量, 且表示 \mathbf{n} 的有向线段所在的直线与平面 α 垂直, 则称 \mathbf{n} 为平面 α 的一个法向量.

5. 空间位置关系的向量表示

位置关系		向量表示
直线 l_1, l_2 的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$	$l_1 // l_2$	$\mathbf{v}_1 // \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$
	$l_1 \perp l_2$	$\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0}$
直线 l 的方向向量为 \mathbf{v} , 平面 α 的法向量为 \mathbf{n}	$l // \alpha$	$\mathbf{v} \perp \mathbf{n} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0}$
	$l \perp \alpha$	$\mathbf{v} // \mathbf{n} \Leftrightarrow \underline{\mathbf{n} = \lambda \mathbf{v}}$
平面 α, β 的法向量分别为 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$	$\alpha // \beta$	$\mathbf{n}_1 // \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 = \lambda \mathbf{n}_2$
	$\alpha \perp \beta$	$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Leftrightarrow \underline{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0}$

二、向量法求空间角

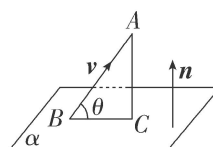
1. 两条异面直线所成的角

设异面直线 l_1, l_2 所成的角为 θ , 其方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}$.

2. 直线与平面所成的角

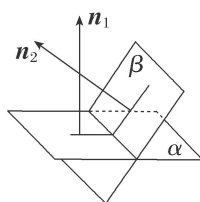
设直线 l 的方向向量为 \boldsymbol{v} ，平面 α 的法向量为 \boldsymbol{n} ，直线 l 与平面 α 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta = |\cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle|$

$$|\cos \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{v}| |\boldsymbol{n}|}.$$



3. 平面与平面所成的角

(1) 平面与平面所成的角：如图，平面 α 与平面 β 相交，形成四个二面角，我们把四个二面角中不小于 0° 且不大于 90° 的二面角称为平面 α 与平面 β 所成的角。



(2) 平面与平面所成的角的计算：若平面 α ， β 的法向量分别是 \boldsymbol{n}_1 和 \boldsymbol{n}_2 ，则平面 α 与平面 β 所成的角即为向量 \boldsymbol{n}_1 和 \boldsymbol{n}_2 的夹角或其补角。设平面 α 与平面 β 所成的角为 θ ，则 $\cos \theta = |\cos \langle \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2 \rangle|$

$$= \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| |\boldsymbol{n}_2|}.$$

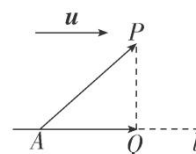
三、向量法求空间距离、折叠及探索性问题

1. 点 P 到直线 l 的距离

设 $\vec{AP} = \boldsymbol{a}$ ， \boldsymbol{u} 是直线 l 的单位方向向量，则向量 \vec{AP} 在直线 l 上的投影向量 $\vec{AQ} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u}$ 。

在 $\text{Rt}\triangle APQ$ 中，由勾股定理，得

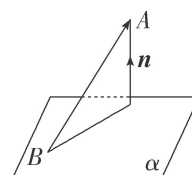
$$PQ = \sqrt{|\vec{AP}|^2 - |\vec{AQ}|^2} = \sqrt{a^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u})^2}.$$



2. 点到平面的距离

如图所示，若 A 是平面 α 外一点， B 是平面 α 内一点， \boldsymbol{n} 是平面 α 的一个法向量，则点 A 到平面 α 的距离 $d = \frac{|\vec{BA} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ 。

$$d = \frac{|\vec{BA} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}.$$



3. 线面距离、面面距离都可以转化为点到平面的距离。